M 5.1

Natürliche Zahlen und Zahlenstrahl

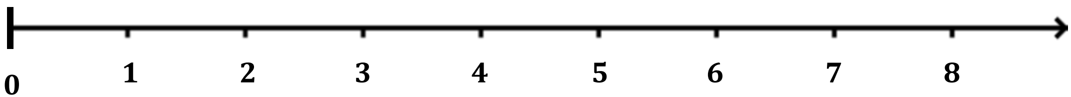
Die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... fasst man zur **Menge der natürlichen Zahlen** zusammen: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

Nimmt man auch die 0 hinzu, schreibt man: $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$

„Die Zahl 12 ist ein Element der Menge der natürlichen Zahlen“: $12 \in \mathbb{N}$

„Die Zahl 0 ist kein Element der Menge der natürlichen Zahlen“: $0 \notin \mathbb{N}$

Zahlenstrahl



Je weiter rechts eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto größer ist sie.

$3 < 5$

$7 > 5$

M 5.2

Dezimalsystem

Große Zahlen kann man mit Hilfe der **Stellenwerttafel** leichter lesen:

...	Billionen			Milliarden			Millionen			Tausender					
...	HBio	ZBio	Bio	HMrd	ZMrd	Mrd	HMio	ZMio	Mio	HT	ZT	T	H	Z	E
	2	**3**	**5**	**7**	**1**	**0**	**2**	**6**	**6**	**7**	**0**	**0**	**3**	**2**	**2**

In Worten: *zweihundertfünfunddreißig Billionen siebenhundertzehn Milliarden zweihundertsechsundsechzig Millionen siebenhunderttausenddreihundertzweiundzwanzig*

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, ... heißen **Stufenzahlen**.

Mit der **Potenzschreibweise** kann man sie kürzer schreiben:

$$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$$
$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$
$$10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$
$$100000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$$

$$1 \text{ Million} = 10^6$$
$$1 \text{ Milliarde} = 10^9$$
$$1 \text{ Billion} = 10^{12}$$
$$1 \text{ Billiarde} = 10^{15}$$
$$1 \text{ Trillion} = 10^{18}$$
$$1 \text{ Trilliarde} = 10^{21}$$

M 5.3

Runden

Beim Runden einer Zahl auf eine bestimmte Stelle betrachtet man die rechts von dieser Stelle stehende Ziffer:

- Ist diese Ziffer eine **0, 1, 2, 3** oder **4**, so wird **abgerundet**.
- Ist diese Ziffer eine **5, 6, 7, 8** oder **9**, so wird **aufgerundet**.

Man verwendet das Zeichen „≈“ („*ist ungefähr gleich*“).

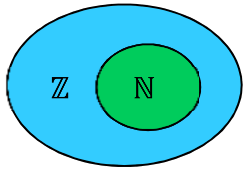
	5368	**10745**
Runden auf Zehner	≈ 5370	≈ 10750
Runden auf Hunderter	≈ 5400	≈ 10700
Runden auf Tausender	≈ 5000	≈ 11000

M 5.4

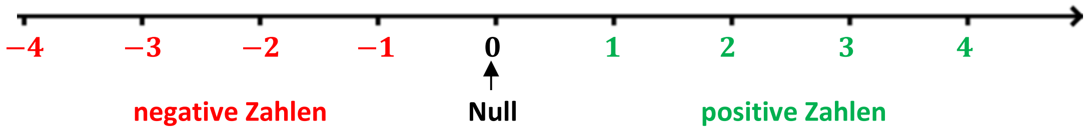
Ganze Zahlen und Zahlengerade

Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird mit der **Null** und den **negativen Zahlen** zur

Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$



Zahlengerade



Den Abstand einer Zahl von der Null nennt man **Betrag** der Zahl: $|-5| = 5$

$|-4| = 4;$ $|4| = 4;$ $|-29| = 29;$ $|0| = 0$

Gegenzahlen

M 5.5

Koordinatensystem

Ein **Koordinatensystem** besteht

- aus einer waagrechten Zahlengeraden: ***x*-Achse**
- und einer senkechten Zahlengeraden: ***y*-Achse**

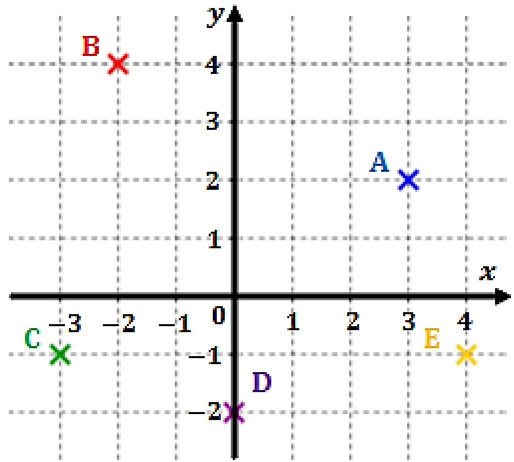
Der Schnittpunkt der Achsen heißt **Ursprung**.

Jeder Punkt im Koordinatensystem lässt sich durch ein Zahlenpaar beschreiben:

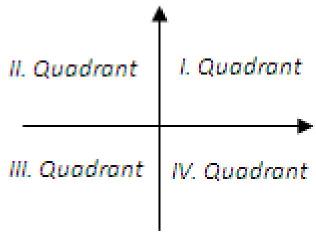
$$\mathbf{A(3|2)}$$

„vom Ursprung 3 waagrecht“
***x*-Koordinate**

„dann 2 senkrecht“
***y*-Koordinate**



$\mathbf{B(-2|4)}$; $\mathbf{C(-3|-1)}$; $\mathbf{D(0|-2)}$; $\mathbf{E(4|-1)}$



M 5.6

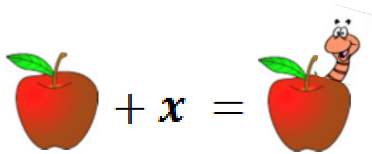
Terme und Gleichungen

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und Platzhalter (Variablen) enthalten kann.

Die zuletzt auszuführende Rechenart legt die Art des Terms fest.

$30 + 8 : 2$	$435 - [32 \cdot (3 + 7)]$
Summe	*Differenz*

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.



Gleichungen löst man durch Probieren oder mit Hilfe von Umkehraufgaben.

$3 + x = 10$	Umkehraufgabe: $10 - 3 = x$	Lösung: $x = 7$
$x - 12 = 5$	Umkehraufgabe: $5 + 12 = x$	Lösung: $x = 17$

M 5.7

Fachbegriffe für die Rechenarten

Beispiel	Name des Terms	Die erste Zahl heißt	Die zweite Zahl heißt	Rechenart
$5 + 3$	Summe	1. Summand	2. Summand	Addition
$5 - 3$	Differenz	Minuend	Subtrahend	Subtraktion
$5 \cdot 3$	Produkt	1. Faktor	2. Faktor	Multiplikation
$5 : 3$	Quotient	Dividend	Divisor	Division
5^3	Potenz	Basis	Exponent	Potenzieren

M 5.8

Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

Addition bei gleichem Vorzeichen

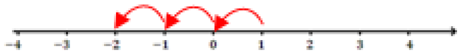
$+1+3=+4$

- Addiere die Beträge
- Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen

$-1-3=-(1+3)=-4$

Addition bei unterschiedlichem Vorzeichen

$+1-3=-(3-1)=-2$



- Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag
- Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag

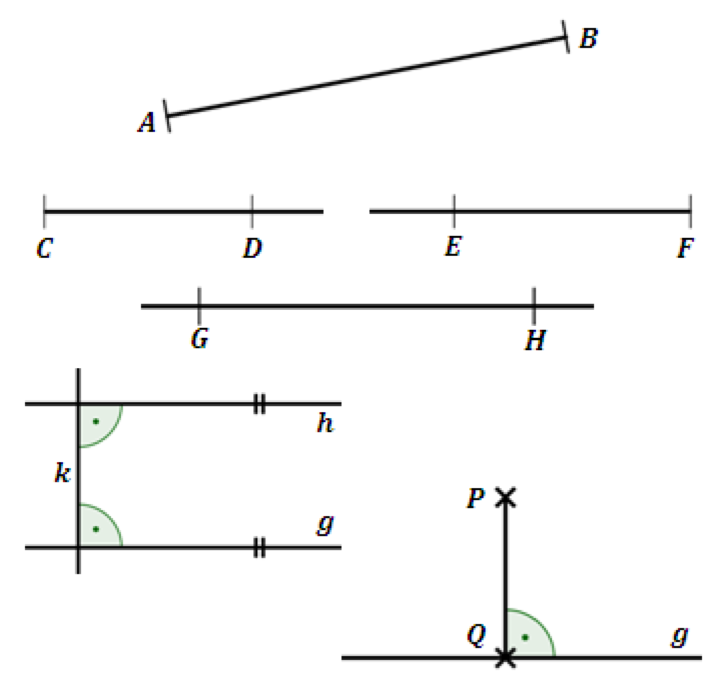
$-1+3=+(3-1)=+2$

Auflösen von Klammern	
$-4+(+3)=-4+3$	$-4+(-3)=-4-3$
$-4-(-3)=-4+3$	$-4-(+3)=-4-3$

M 5.9

Geometrische Grundbegriffe

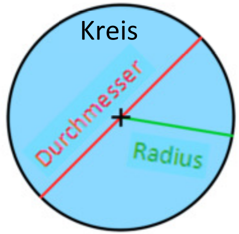
Strecke	$\overline{AB}$
Streckenlänge	$\lvert\overline{AB}\rvert = 5{,}2\ \text{cm}$
Halbgerade	$[CD$ und $EF]$
Gerade	GH
g* ist parallel zu *h	$g \parallel h$
g* ist senkrecht zu *k *oder:* ***g* ist ein Lot zu *k***	$g \perp k$
Abstand eines Punktes P von einer Geraden *g*	$\lvert\overline{PQ}\rvert = 2{,}1\ \text{cm}$



M 5.10

Kreis

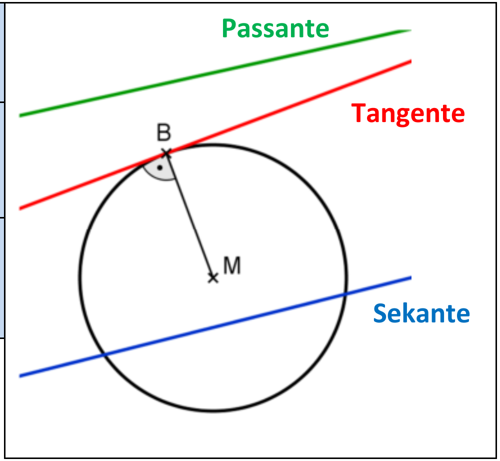
Ein **Kreis** ist die Menge aller Punkte, die von einem **Mittelpunkt M** den gleichen Abstand haben. Diesen Abstand nennt man **Radius**.



Schreibweise: $k(\mathrm{M}; r)$

Lagebeziehungen und Schreibweisen

Punkt B liegt auf der Tangente *t*	$\mathrm{B} \in t$
Punkt B liegt nicht auf der Sekante *s*	$\mathrm{B} \notin s$
Punkt B liegt auf dem Kreis *k*	$\mathrm{B} \in k(\mathrm{M}; r)$

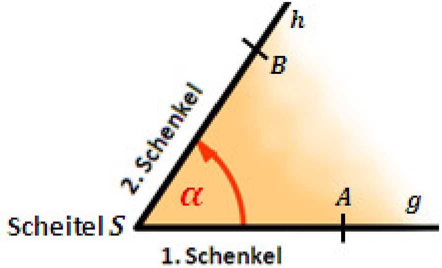


M 5.11

Winkel

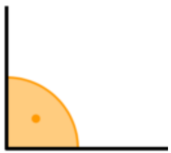
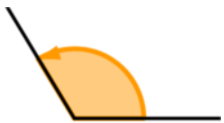
Dreht sich eine Halbgerade gegen den Uhrzeigersinn um ihren Anfangspunkt S, so entsteht ein **Winkel**.

$$\alpha = \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle ASB$$



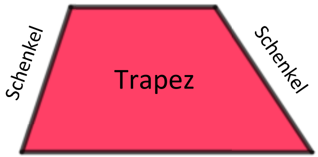
α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ε	epsilon

Arten von Winkel

Spitzer Winkel $0° < \alpha < 90°$	Rechter Winkel $\alpha = 90°$	Stumpfer Winkel $90° < \alpha < 180°$	Gestreckter Winkel $\alpha = 180°$	Überstumpfer Winkel $180° < \alpha < 360°$
				

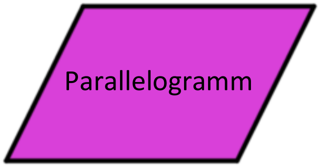
M 5.12

Vierecke

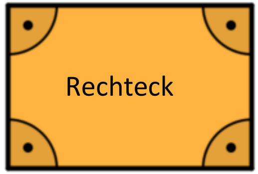


- zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel

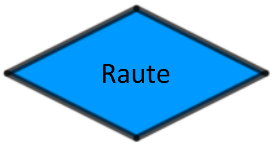
- zwei benachbarte Seiten sind jeweils gleich lang



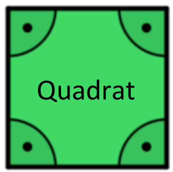
- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel



- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel
- vier rechte Winkel



- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel
- alle Seiten sind gleich lang



- gegenüberliegende Seiten sind jeweils parallel
- alle Seiten sind gleich lang
- vier rechte Winkel

M 5.13

Rechnen mit 0 und 1

0		1	
$0 \cdot 5 = 0$	$5 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 5 = 5$	$5 \cdot 1 = 5$
$0 : 5 = 0$		$5 : 1 = 5$	

Nie durch Null dividieren!

M 5.14

Rechengesetze

Kommutativgesetz Vertauschungsgesetz
$a + b = b + a$ *oder* $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz Verbindungsgesetz
$a + (b + c) = (a + b) + c$ *oder* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivgesetz Verteilungsgesetz
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *oder* $(a + b) : c = a : c + b : c$

Rechenvorteile

$64 + (78 + 36) = 64 + (36 + 78) = (64 + 36) + 78 = 100 + 78 = 178$

$4 \cdot (27 \cdot 25) = 4 \cdot (25 \cdot 27) = (4 \cdot 25) \cdot 27 = 100 \cdot 27 = 2700$

$36 \cdot 13 + 36 \cdot 7 = 36 \cdot (13 + 7) = 36 \cdot 20 = 720$

$99 \cdot 43 = (100 - 1) \cdot 43 = 100 \cdot 43 - 1 \cdot 43 = 4300 - 43 = 4257$

M 5.15

Potenzieren

Für Produkte mit gleichen Faktoren gibt es eine Kurzschreibweise:

Die **Potenzschreibweise**

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\textbf{6 Faktoren}} = 2^{6}$$

Exponent

Basis

Zehnerpotenzen				
$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$	$10^5 = 100000$

Quadratzahlen				
$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$

M 5.16

Primfaktorzerlegung

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Jede natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl oder lässt sich in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen.

Diese eindeutige Zerlegung heißt **Primfaktorzerlegung**.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

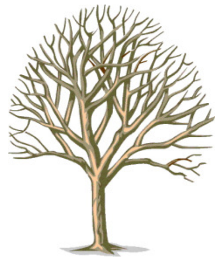
$\mathbf{165} = \mathbf{3 \cdot 5 \cdot 11}$

$\mathbf{20} = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = \mathbf{2^2 \cdot 5}$

$\mathbf{720} = 72 \cdot 10 = 8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = \mathbf{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$

M 5.17

Baumdiagramme und Zählprinzip



Situationen, bei denen man mehrere Dinge auswählen und miteinander kombinieren muss, kann man mit einem **Baumdiagramm** darstellen. Die Anzahl der Baumenden entspricht der Anzahl an Möglichkeiten. Bei einem „regelmäßigen“ Baumdiagramm kann man diese auch berechnen, indem man die Anzahlen der Wahlmöglichkeiten auf jeder Stufe multipliziert (**Zählprinzip**).

Herr Huber hat für den Strandurlaub drei Hemden und zwei Shorts dabei. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten hat er?

Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

M 5.18

Multiplikation und Division ganzer Zahlen

1.	Multipliziere (Dividiere) die Beträge.
2.	➢ Sind die Vorzeichen **gleich**, so ist das Ergebnis **positiv**. ➢ Sind die Vorzeichen **verschieden**, so ist das Ergebnis **negativ**.

Multiplikation	Division
$3 \cdot 4 = 12$ $(-3) \cdot (-4) = 12$	$30 : 5 = 6$ $(-30) : (-5) = 6$
$3 \cdot (-4) = -12$ $(-3) \cdot 4 = -12$	$30 : (-5) = -6$ $(-30) : 5 = -6$

· / :	+	-
+	+	-
-	-	+

M 5.19

Vorrangregeln

Klammern

vor

Potenzen

vor

Punktrechnungen

vor

Strichrechnungen

Bei reinen Punkt- oder Strichrechnungen: Von links nach rechts rechnen

Und was noch nicht zum Rechnen dran, das schreibe unverändert an!

$15 - 3 \cdot 4 + 5 = 15 - 12 + 5 = 3 + 5 = 8$

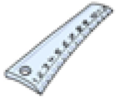
$30 - 3 \cdot 2^3 = 30 - 3 \cdot 8 = 30 - 24 = 6$

$25 - 2 \cdot (5 - 2)^2 = 25 - 2 \cdot 3^2 = 25 - 2 \cdot 9 = 25 - 18 = 7$

$[5 + (4 - 1)^3] : 8 + 6 = [5 + 3^3] : 8 + 6 = [5 + 27] : 8 + 6 = 32 : 8 + 6 = 4 + 6 = 10$

M 5.20

Größen




Größe	Einheiten				
Länge	1 mm	1 cm	1 dm	1 m	1 km
	· 10	· 10	· 10	· 1000	
Masse	1 mg	1 g	1 kg	1 t	
	· 1000	· 1000	· 1000		
Geld	1 ct	1 €			
	· 100				
Zeit	1 s	1 min	1 h	1 d	
	· 60	· 60	· 24		

2, 3 m

Maßzahl *Einheit*

1,5 m = 15 dm; 3800 mm = 380 cm = 38 dm

0,02 t = 20 kg = 20000 g; 300 mg = 0,3 g

2,58 € = 258 ct; 5600 ct = 56 €

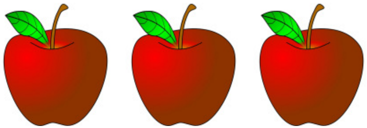
1 d = 24 h = 1440 min; 640 s = 10 min 40 s

Rechnen mit Größen: 2 g + 450 mg = 2000 mg + 450 mg = 2450 mg = 2,45 g

2 kg · 5 = 10 kg; 20 kg : 5 = 4 kg; 30 kg : 6 kg = 5

M 5.21

Dreisatz



3 kg Äpfel kosten 2,40 €. Wie viel kosten 5 kg?	**Ein Dachdecker braucht für zwei Dächer 16 Stunden. Wie lange braucht er für drei Dächer?**
3 kg kosten 2,40 € $:3$ $:3$ 1 kg kostet 2,40 € $:3 = 0{,}80$ € $\cdot 5$ $\cdot 5$ 5 kg kosten 0,80 € $\cdot 5 =$ **4,00 €**	für 2 Dächer braucht er 16 h $:2$ $:2$ für 1 Dach braucht er 16 h $:2 = 8$ h $\cdot 3$ $\cdot 3$ für 3 Dächer braucht er 8 h $\cdot 3 =$ **24 h**

M 5.22

Maßstab

Ein **Maßstab** von $1 : 100$ bedeutet, dass in Wirklichkeit alles 100-mal so lang wie auf dem Plan ist.

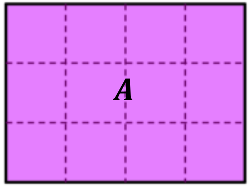
Maßstab: $1 : 5\,000$ **Länge auf dem Plan:** 3 cm	**Länge in Wirklichkeit** $3\text{ cm} \cdot 5\,000 = 15\,000\text{ cm} = 150\text{ m}$
Maßstab: $1 : 100$ **Länge in Wirklichkeit:** 3 m	**Länge auf dem Plan** $3\text{ m} : 100 = 300\text{ cm} : 100 = 3\text{ cm}$
Länge in Wirklichkeit: 6 km **Länge auf dem Plan:** 2 cm	**Maßstab** $6\text{ km} : 2\text{ cm} = 600\,000\text{ cm} : 2\text{ cm} =$ $= 300\,000 : 1$

M 5.23

Flächeneinheiten

Die Größe der eingeschlossenen Fläche einer Figur nennt man **Flächeninhalt A**.

Länge · Länge = Fläche



Flächeneinheiten und ihre Umrechnung

Quadrat-millimeter	Quadrat-zentimeter	Quadrat-dezimeter	Quadrat-meter	Ar	Hektar	Quadrat-kilometer
$1\ \mathrm{mm}^2$	$1\ \mathrm{cm}^2$	$1\ \mathrm{dm}^2$	$1\ \mathrm{m}^2$	$1\ \mathrm{a}$	$1\ \mathrm{ha}$	$1\ \mathrm{km}^2$

$\cdot 100$ $\cdot 100$ $\cdot 100$ $\cdot 100$ $\cdot 100$ $\cdot 100$

$1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2$

$12345\ \mathrm{cm}^2 = 123{,}45\ \mathrm{dm}^2 = 1{,}2345\ \mathrm{m}^2$

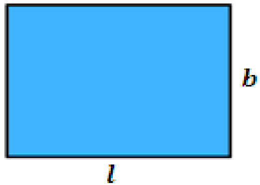
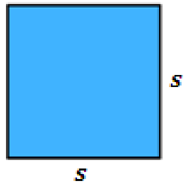
$2{,}4\ \mathrm{a} = 240\ \mathrm{m}^2$

$3\ \mathrm{ha} = 0{,}03\ \mathrm{km}^2$

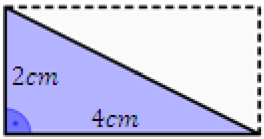
$4\ \mathrm{a} - 50\ \mathrm{m}^2 = 400\ \mathrm{m}^2 - 50\ \mathrm{m}^2 = 350\ \mathrm{m}^2 = 3{,}5\ \mathrm{a}$

M 5.24

Flächeninhalt des Rechtecks

Rechteck	Quadrat
 $A_R = \textbf{Länge} \cdot \textbf{Breite}$ $A_R = l \cdot b$	 $A_Q = \textbf{Seitenlänge} \cdot \textbf{Seitenlänge}$ $A_Q = s \cdot s = s^2$

Den Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren berechnet man, indem man sie in Rechtecke **zerlegt** oder zu Rechtecken **ergänzt**.



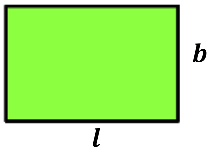
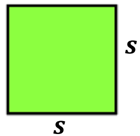
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist halb so groß wie der des Rechtecks.

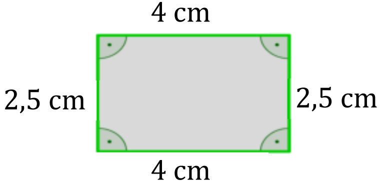
$A_D = A_R : 2 = (2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}) : 2 = 8 \text{ cm}^2 : 2 = 4 \text{ cm}^2$

M 5.25

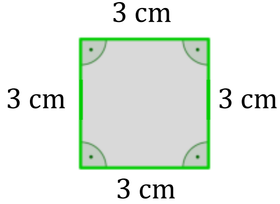
Umfang

Der **Umfang** einer Figur ist die Länge ihrer Randlinie.

Rechteck	Quadrat
 $U_R = 2 \cdot l + 2 \cdot b$	 $U_Q = 4 \cdot s$



$$U = 2 \cdot 4\text{ cm} + 2 \cdot 2,5\text{ cm} = 13\text{ cm}$$

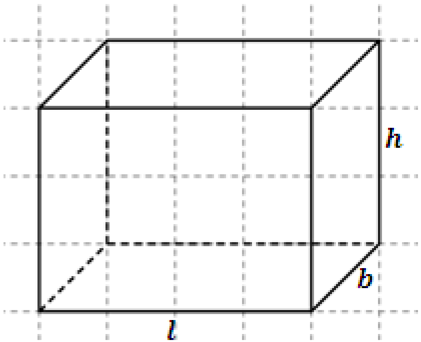


$$U = 4 \cdot 3\text{ cm} = 12\text{ cm}$$

M 5.26

Schrägbilder

Die räumliche Darstellung eines Körpers nennt man **Schrägbild**.



$l = 2\text{ cm},\ \ b = 1\text{ cm},\ \ h = 1{,}5\text{ cm}$

Zeichenregeln

- Die Vorderfläche wird in wahrer Größe gezeichnet.
- Nach hinten verlaufende Kanten werden parallel zu den Kästchendiagonalen und verkürzt gezeichnet:
  $1\text{ cm} \mathrel{\hat{=}} 1\text{ Kästchendiagonale}$

Beachte:

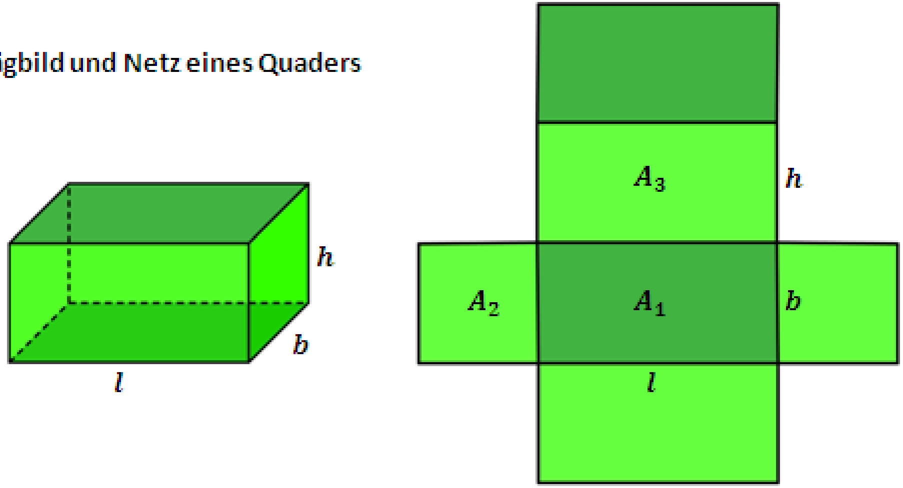
- Parallele Kanten sind auch im Schrägbild parallel.
- Rechte Winkel erscheinen im Schrägbild nicht immer als rechte Winkel.

M 5.27

Oberflächeninhalt

Der **Oberflächeninhalt O** eines Körpers ist gleich dem Flächeninhalt seines **Netzes**.

Beispiel: Schrägbild und Netz eines Quaders



$$\boldsymbol{O = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + l \cdot h)}$$

$l = 2\text{ cm},\qquad b = 1\text{ cm},\qquad h = 1\text{ cm}$

$O = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (2\text{ cm}^2 + 1\text{ cm}^2 + 2\text{ cm}^2) = 10\text{ cm}^2$